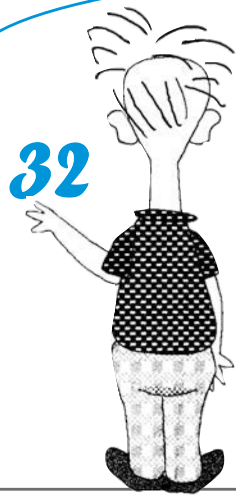
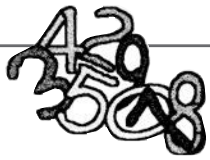


Kopf und Zahl

32

JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
32. AUSGABE, Herbst 2019
www.dyskalkulie.de



Das Dezimalsystem

Dr. Michael Wehrmann, Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

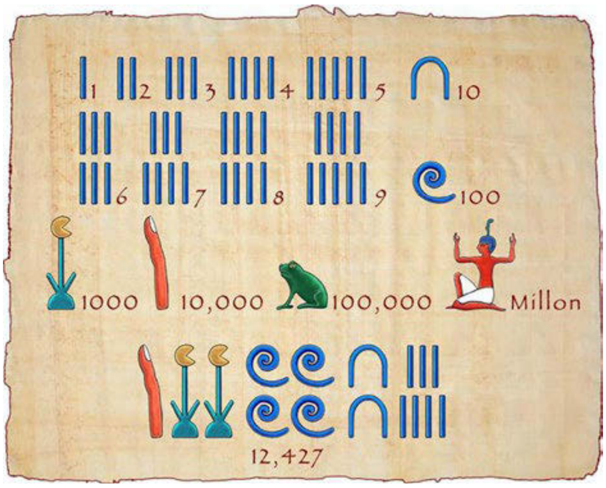
Probleme über Probleme

An unserem Institut treffe ich seit Jahren auf Lernende mit Mathematikproblemen unterschiedlichster Couleur. Die Verständnisschwierigkeiten reichen manchmal bis in den vorschulischen Bereich zurück. Etlichen Kindern mangelt es an einem kardinalen Zahlbegriff, was man daran sehen kann, dass sie 8 – 7 nur mit den Fingern rückwärts zählend bewältigen können. Rechenschwache Kinder sind oft Meister des Zählens. In dieser Sackgasse des zählenden Rechnens verbleiben sie nicht selten durch intensives häusliches Üben oder konventionelle Nachhilfe.

Was ich bei den meisten meiner untersuchten Schüler in irgendeiner Form feststelle sind „Verständnisprobleme beim Zehnerübergang". Offensichtlich sind solche Fälle, bei denen jede Rechnung rein zählend abgearbeitet wird. Weniger klar sind diejenigen Fälle, bei denen die Kinder – oberflächlich betrachtet – korrekt vorgehen: Eine Zehnerstange wird vorschriftsmäßig in zehn Einerwürfel eingetauscht oder an anderer Stelle werden die schriftlichen Rechenverfahren inklusive der „Merk-Einsen" fehlerfrei reproduziert. Letzteres geht oft mit einer Leistungsverbesserung in der zweiten Hälfte der dritten Klasse einher und der Fehlschluss lautet, jetzt habe es endlich „klick!" gemacht. Im Verfahren der qualitativen Förderdiagnostik legen die Kinder mit der„Methode des lauten Denkens" ihre Kopfrechenstrategien offen. Der geschulte Diagnostiker erkennt dann so manches Mal einen rein schematischen Umgang mit Zifferngebilden. Die Schüler haben zwar mechanistisch bestimmte Verfahrensvorschriften eingepaukt, doch Fragen wie „Wie viel fehlt von 63 bis 100?" oder „Was ist die Hälfte von 70?" können sie damit nicht beantworten.

Historie und Nutzen

Dezimalzahlen, genauer: natürliche Zahlen in ihrer dezimalen Darstellungsform, sind eine gedankliche Errungenschaft der Menschheitsgeschichte. Bereits die „alten Ägypter" kannten eine dezimale Notationsform für Anzahlen und verwendeten verschiedene der Anschauung entlehnte Symbole für eins, zehn, hundert usw. Für 350 notierten sie dreimal das Symbol für hundert und fünfmal dasjenige für



Quelle: de.nextews.com/e1962c12

Inhalt

zehn.[1] Der historischen Entwicklung kann man entnehmen, dass die dezimale Bündelung eine gedankliche Leistung ist, die für sich zu würdigen und zu erklären ist. Keinesweg ist sie automatisch an die Darstellung mit Ziffern in einem Stellenwertsystem gebunden. Das uns geläufige Ziffern-Positionssystem ist etwa 1.500 Jahre alt und stammt aus Indien – der Name „arabische" Zahlen verdankt sich derjenigen Kultur, die es in den Westen brachte.

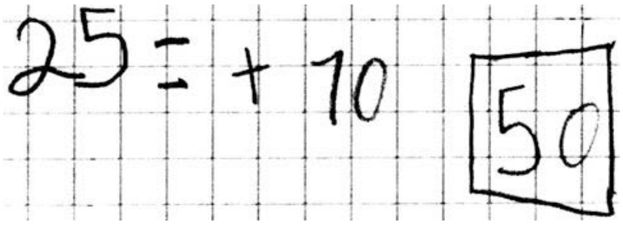
Dezimalzahlen sind eine praktische, systematische und effektive Art, (auch große) Quantitäten kompakt zu verschriften. Dafür wird ein überschaubarer Zeichenvorrat genutzt, die Ziffern 0 bis 9, welche wiederkehrend an verschiedenen Positionen eingesetzt werden. Die Ziffern stehen stets für denselben Wert und es wird mit ihnen deshalb stets auf dieselbe Art und Weise verfahren, was sich mit „gerechnet wird immer nur bis zehn" zusammenfassen lässt. Durch die Position wird dann der Ziffernwert mit dem Stellenwert verknüpft.

Was macht das Dezimalsystem für manche so schwer begreifbar?

Quelle: www.arbeitskreis-lernforschung.de

Wenn sich Schüler den Bereich bis zehn inklusive der Addition und der Subtraktion nicht verständig erarbeitet haben, macht es keinen Sinn, den Bereich zu überschreiten und bis hundert zu gehen: Ohne ein basales Zahlverständnis bleibt den Kindern nur die Möglichkeit, ihre bisherigen Subjektivismen mehr schlecht als recht auf den höheren Bereich zu übertragen.

Die Logik des Dezimalsystems hat ihre eigenen Tücken. Es stehen im Zahlsymbol aufgereiht Ziffern nebeneinander, was manches Kind zur Aussage verleitet „Die ‚25' besteht aus zwei Zahlen [sic!], die Zwei und die Fünf!" Dieser Schüler kennt einstellige Zahlen und ist der Auffassung, jetzt seien einfach mehrere solche „Zahlen" nebeneinander zu verarbeiten, die Ziffern im Zahlsymbol sind für ihn gleichwertig. Der Nutzen des Dezimalsystems besteht allerdings darin, dass zu den Ziffern-



Quelle: www.zahlbegriff.de

werten über ihre Position die Stellenwertigkeit hinzutritt. Das ist eine spezielle gedankliche Abstraktion, die es erstmal zu begreifen gilt.

I. Das Fundament in der Grundschule

Die Entwicklung des kardinalen Zahlbegriffs beruht auf Wahrnehmungsleistungen und deren kognitiver Verarbeitung. Aufbauend auf einem basalen Mengenbewusstsein müssen Schüler Zahlen über einen Begriff der Anzahl verstehen lernen. Natürliche Zahlen sind die allgemeine Vorstellung von Anzahl, da sie die Anzahl von Objekten in einer Menge bedeuten. Ihnen liegt als Einheit das Einfache, die Eins, zu Grunde. Ihre Gemeinsamkeit besteht im Ausdrücken von Vielfachen der Eins, ihre Besonderheit ist die jeweils bedeutete Anzahl. Salopp kann man das Prinzip des kardinalen Zahlbegriffs mit „alle Zahlen sind Einsen" ausdrücken, dies weist auf den inkrementellen Zahlaufbau hin: $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. Die Einheit eins muss, selbst bei der Zahl null, stets mitgedacht werden. Damit sind Zahlen miteinander vergleichbar, zerlegbar und zusammenbaubar. Dies mündet in das Wissen, dass Zahlen aus Zahlen zusammengesetzt sind: $8 = 5 + 3$. Die verständig verinnerlichten Zahlzerlegungen sind *das* Fundament für zählfreies Rechnen.

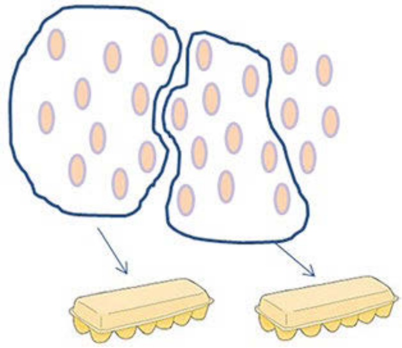
Die neue Einheit Zehner

Das Dezimalsystem führt, aufbauend auf diesem kardinalen Zahlverständnis, eine *neue Einheit* ein. Zehn werden gebündelt zur neuen Einheit *ein Zehner*. Im Dezimalsystem erhält die ursprüngliche implizite Einheit eins den neuen Namen „Einer". Es werden also *zehn Einer* gebündelt zu einem Zehner.

Ein Einer ist identisch mit der Zahl eins. Ein Zehner hingegen ist *nicht* dasselbe wie zehn Einer, wenn auch gleich viel. Diese Ambivalenz ist das basale Grundprinzip des Dezimalsystems, das es zu erarbeiten gilt. Ein Zehner heißt nicht deshalb „Zehner", weil er zehn Einer enthält, sondern weil er aus zehn Einern entstanden ist. Veranschaulichen lässt sich das gut, indem man zehn Einerwürfel neben eine Zehnerstange legt. Links und rechts liegt nun wirklich nicht dasselbe – auf der einen Seite sind es zehn kleine Würfelchen, auf der anderen eine Stange.

Es ist nicht damit getan, einzuüben, dass immer, wenn zehn Einerwürfel auf dem Tisch liegen, diese gegen eine Zehnerstange eingetauscht werden oder umge-

1 vgl. Ifrah, G.: Universalgeschichte der Zahlen, Frankfurt/M. (Campus) 1986



Quelle: grundschule-kapiert.de

kehrt, wenn die Einer für die Subtraktion nicht ausreichen, ein Zehner aufgelöst wird. Dies kann, wie das Füllen von Eierkartons, zu einer reinen Handlungsvorschrift verkommen, die dann womöglich beim Weglassen des Materials vor dem geistigen Auge weitergeführt wird, ohne dass dem Schüler etwas über die Wertigkeit des Zehners klar geworden ist.

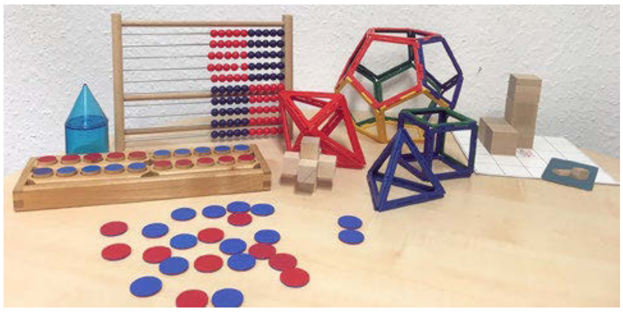
Ziffernwert, Stellenwert und Zahlenwert

Quelle: www.manutan.de

Manchen Kindern erscheint der Umgang mit den Ziffern im Zahlsystem als ein Hexenwerk. „Erläuterungen" wie die folgende höre ich gelegentlich bei der Einführung zweistelliger Zahlen und sie tragen mit Sicherheit dazu bei: „Wandert die ‚2' von der Einerstelle auf die Zehnerstelle, meint sie auf einmal eine Zwanzig!" Dies ist keine hilfreiche Aussage, denn hier wird gleich auf den Wert der gesamten Zahl hingewiesen, ohne zu erläutern, *wie* dieser Wert überhaupt zustande kommt. Einem Lernenden, der so mit dem Dezimalsystem konfrontiert wird, muss dies vorkommen wie Zauberei. Auch das Hantieren mit Magnetziffern ist für eine Erklärung wenig hilfreich: Auf eine „20" wird vorbereitend auf die Einerstelle die Ziffer „5" geheftet. Diese Zahl „25" wird dann „erklärt", indem die „5" beiseite genommen wird und sich darunter, wie durch Zauberhand, die bislang verborgene „20" offenbart. Mehr als eine begriffslose Vorlesehilfe des Zahlsymbols („fünf"-und-„zwanzig") stellt so etwas jedoch nicht dar.

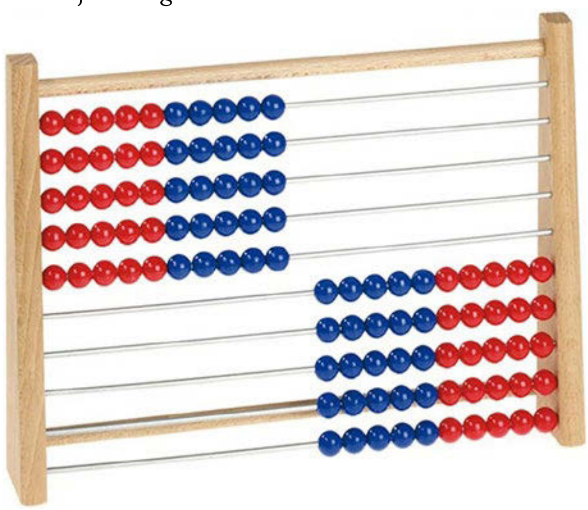
Die Ziffer „2" ändert ihren Wert jedoch nicht, sie hat vielmehr immer den Wert zwei. Dies versteht man unter dem *Ziffernwert*. Hinzu tritt der *Stellenwert*, dieser ergibt sich über die *Position* der Ziffer im Zahlsymbol. Der Stellenwert der Zehnerstelle ist zehn, der der Einerstelle ist eins. Steht die Ziffer „2" auf der Zehnerstelle, meint sie zwei Zehner. Die Zahl 25 kann man aufgesplittet notieren als $25 = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$. Es geht nun nicht darum, diese Gleichung mit den Kindern zu besprechen, sondern sie dient uns der Verdeutlichung dessen, was erarbeitet werden muss: Anzahl und Einheit, Ziffernwert und Stellenwert. Die Zahl 25 besteht aus zwei Zehnern und fünf Einern. Der Term $2 \cdot 10$ steht für zwei Zehner, $5 \cdot 1$ für fünf Einer.[2] In der Gleichung bekommt der Ausdruck $5 \cdot 1$ mit den Zehnern $2 \cdot 10$ einen zusammenhängenden Sinn: Das „$\cdot$ 1" weist auf die Einer hin – in Abgrenzung zu den neu hinzugetretenen Zehnern, die mit „$\cdot$ 10" gekennzeichnet werden. Erst wenn der Zahlenwert 25 als separate Bilanzierung von zwei Zehnern und fünf Einern über die Logik von Anzahl Ziffernwert und Einheit Stellenwert als *eine* Zahl gedacht wird, ist ein dekadischer Zahlbegriff ausgebildet.

Veranschaulichung – der gedankliche Weg von der Menge zum Symbol



Quelle: www.uni-potsdam.de/gsp-mathematik

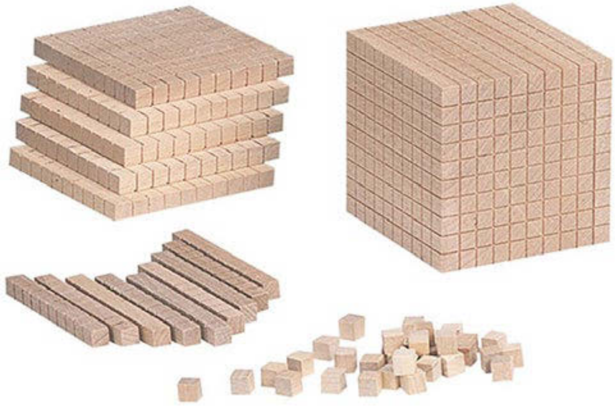
Veranschaulichungsmaterial spricht nie für sich selbst. Im Lerndialog müssen sich Schüler vielmehr über eine angeleitete *reflektierte Materialhandlung* Zusammenhänge über Quantitäten und deren Veränderung erschließen. Im Fall des Zehnersystems ist dies die Logik des Stellenübergangs. Daher ist es elementar, mit den Kindern über den Einheitenwechsel explizit zu sprechen. Es muss am Material erläutert werden, dass und wie beim Bündeln ein Zehner entsteht bzw. aufgelöst wird. Kinder müssen nachvollziehen, dass etwas Neues mit höherer Wertigkeit entsteht, dem ein neuer Name zugewiesen wird. Am Veranschaulichungsmaterial muss sich die neue Einheit daher auch als separates Objekt zeigen.



Quelle: www.betzold.de

2 Betrachtet man den Term $5 = 5 \cdot 1$ isoliert, so verweist er auf den inkrementellen Aufbau der Kardinalzahlen ($5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), ist also nicht tautologisch.

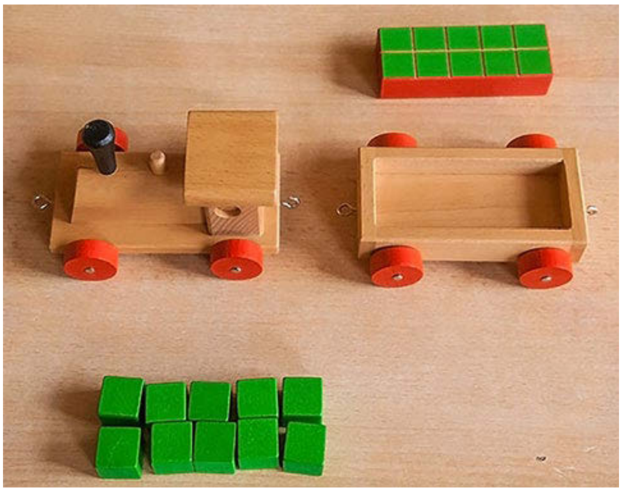
Nicht gut geeignet ist ein Rechenrahmen (fälschlicherweise gerne auch „Abakus“ genannt), da die Bündelung damit nur implizit gezeigt werden kann, indem man zehn einzelne Perlen nach rechts schiebt – es bleiben jedoch schlichtweg Einer. Zudem ist der Rechenrahmen unpraktisch beim Rechnen bis hundert: Zur Darstellung von 38 + 27 muss man sich schon ziemlich verrenken und dabei die sinnvollen Schritte des Kopfrechnens verlassen: Erst den Zehner voll machen, dann die Zehner dazu und schließlich die restlichen Einer verarbeiten ist keine anzustrebende Strategie.



Quelle: www.betzold.de

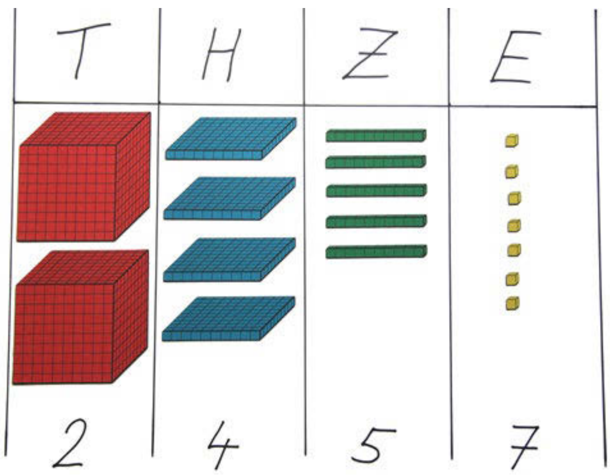
Material, das die Bündelung explizit zeigt, ist wesentlich besser geeignet. Notwendigerweise muss sich die Bündelung in einem Austausch (zehn Einer werden zu einem Zehner) ausdrücken. Etabliert haben sich dafür die Systemblöcke nach Zoltán Pál Dienes,[3] bestehend aus gleichfarbigen Einerwürfeln, Zehnerstangen, Hunderterplatten und dem Tausenderwürfel. Einer Zehnerstange sieht man an ihren Einkerbungen noch an, dass sie aus zehn Einerwürfeln entstanden ist. Einen Abstraktionsschritt weiter geht der Rechenzug von Reinhard Kutzer.[4] Zehn grüne Einerwürfel füllen in Form eines Zehnerfeldes einen Wagen. Der Austausch erfolgt gegen einen Zehnerblock. Dieser ist auf der einen Seite ebenfalls grün und weist (ähnlich wie die Dienes-Zehnerstangen) Einerkerbungen auf, um darauf hinzuweisen, wie er entstanden ist. Wird der Zehnerblock umgedreht, verschwinden die Kerben und die Farbe wechselt zudem zu rot. Beides unterstreicht den Einheitenwechsel.

Erscheint der Zehnerblock des Kutzer-Rechenzuges, wenn er auf die rote Seite umgedreht wird, als *ein* Ding, das *einen* Zehner repräsentiert, entspricht seine Größe noch der von *zehn* Einerwürfeln – beides füllt einen Zehnerwagen genau aus. Vor der Einführung



Quelle: www.best-sabel.de

der Dezimalzahlsymbole bietet sich daher ein weiterer Abstraktionsschritt an: In Anlehnung an Kutzers Farbgebung kann man grüne und rote Plättchen mit der Wertigkeit Einer und Zehner verknüpfen. Die Plättchen für Einer und Zehner haben die gleiche Größe, ihre bedeutete Wertigkeit wird nurmehr durch ihre Farbe ausgedrückt. Dies ist in seiner Logik der eingangs erwähnten ägyptischen Zahldarstellung verwandt. Eine praktische Anwendung kann dies bei Würfelspielen finden, um den Überblick zu behalten, wie viele Punkte man bereits erzielt hat.



Quelle: www.spielundlern.de

Möchte man auf dem Weg hin zum Ziffern-Positionssystem bereits auf die Positionen der Einer- und Zehnerziffern im Zahlsymbol hinweisen, so kann man diese Plättchen oder auch die Systemblöcke in ein Stellenwertregal mit beschrifteten Fächern für Hunderter, Zehner und Einer einlegen oder sich ein solches auf Papier zeichnen. Es sind zudem magnetische Versionen des Materials im Handel erhältlich.

Wechsel zwischen Veranschaulichung, Zahlwort und Zahlsymbol

Bei der Darstellung von Zahlen haben wir es neben der Veranschaulichung mit Zahl*worten* und Zahl*symbolen* zu tun. Zwischen diesen drei Ebenen müssen Schüler

3 vgl. Dienes, Z. P.; Golding, E.W.: Menge – Zahl – Potenz, Freiburg (Herder) ^{3}1970

4 vgl. Kutzer, R.; Bagus, G.; Freise, B.; Herzberg, H.; Kutzer, G.; Müller, H.: Mathematik entdecken und verstehen (Schülerband 2), Frankfurt/M. (Diesterweg) ^{2}1995 *sowie* Kutzer, R.; Bagus, G.; Kutzer, G.; Müller, H.: Mathematik entdecken und verstehen (Lehrerband 2), Frankfurt/M. (Diesterweg) 1985

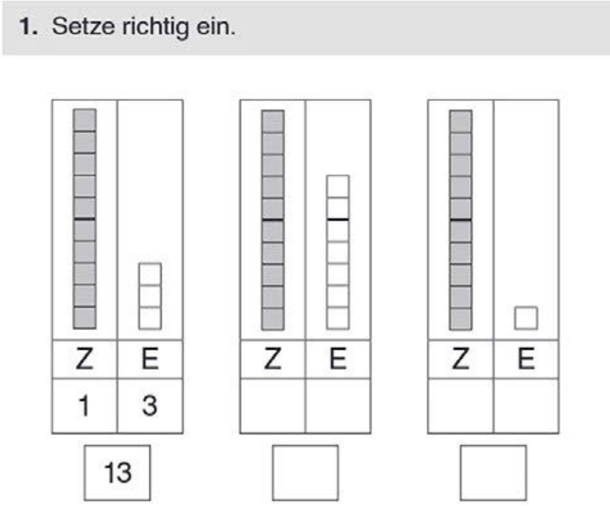
flexibel hin und her wechseln können. Leider geben sich Schulwerke nicht immer große Mühe, dies sauber einzuführen bzw. systematisch zu bewältigen.

Rechenschwache Kinder verschriften zweistellige Zahlen oft lautgetreu, d. h. sie bringen zunächst den zuerst gehörten Eineranteil („fünf…“) als Ziffer zu Papier und im Anschluss den danach vernommenen Zehneranteil („…und zwanzig“). Vollziehen Schüler dies strikt in lateinischer Schreibrichtung, landet das falsche Zahlsymbol auf dem Papier: „fünfundzwanzig“ wird zu „52“. Um diesen Fehler zu vermeiden, greifen Lernende – womöglich angeregt durch häusliches Üben – oft zu einer Kompensationsstrategie: Die Einerziffer kommt nach wie vor als erstes zu Papier, doch die Zehnerziffer landet asynchron zur lateinischen Schreibrichtung *links* daneben – etwas Platz wurde dafür gelassen. Dies zeigt, dass eine korrekte Verschriftung nicht unbedingt mit einem Dezimalzahlverständnis einher gehen muss.

Diesem „Problem“ widmet sich allen Ernstes ein Verein, der für die Änderung der deutschen Sprache plädiert.[5] Man solle künftig – wie im angelsächsischen Sprachraum – „zwanzigeins“ statt „einundzwanzig“ sagen. Eine Hilfe wäre dies allerdings nur dafür, dass rechenschwache Kinder schneller das richtige Zahlsymbol zu Papier bringen – ihr Unverständnis des Zahlsystems bliebe damit aber konserviert. Einer ähnlichen Logik folgen heute etliche Schulbücher, wenn Abbildungen von strukturiertem Material mit dem Zahlsymbol versehen werden sollen. Die Zehnerstangen liegen stets auf der linken Seite, die Einermenge ist rechts daneben zu sehen, so dass ein Schüler mit etwas Übung auch ohne Zehnerverständnis die richtigen Zahlsymbole in den darunter vorgegebenen Kästchen notieren kann. Dies sind Aufgaben, die einen puren Schematismus einüben.

Wie ist nun der Ebenenwechsel stattdessen sinnvoll zu bewältigen? Den obigen Beispielen ist gemein, dass stets auf einen *unmittelbaren* Wechsel von einer Ebene zur nächsten abgezielt wird, bei der Vereinsinitiative vom Wort zum Symbol, bei den Arbeitsblättern von der Menge zum Symbol. Und genau da liegt das Problem.

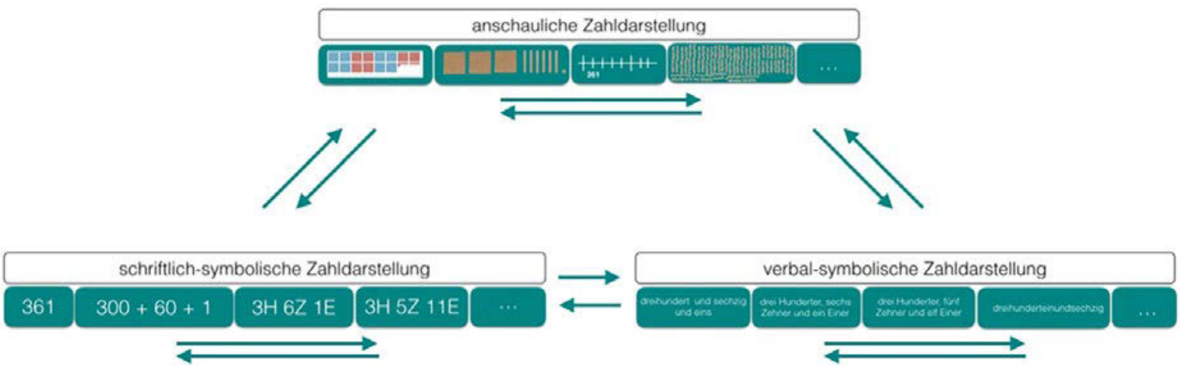
5 Zwanzigeins e. V., im Internet unter https://zwanzigeins.jetzt



Quelle: www.finken.de

Was fehlt, ist der nötige Zwischenschritt über das *Zahlverständnis*. Egal, bei welcher Darstellungsform wir beginnen – Mengendarstellung, Zahlwort oder Zahlsymbol – zunächst muss eine geistige Sortierung der bedeuteten Anzahl erfolgen. Dies ist eine *logische* Einordnung und keine *räumliche*. Diese Vorstellung kennt kein „links“ oder „rechts“, sondern besteht in der Bilanzierung „wie viel von was?“, also wie viele von den Einern und wie viele von den Zehnern. Erst wenn diese Bilanzierung gedanklich gelingt, kann der saubere Wechsel auf die Zielebene erfolgen. Hierfür muss man wissen, wie die Zahlwörter aufgebaut sind (man spricht den Eineranteil zuerst) und wie die Zahlsymbole verschriftet werden (die höherwertigere Ziffer – also der Zehner – wird zuerst geschrieben). Beim Material spielt die Anordnung keine Rolle – allenfalls sollte Gleiches bei Gleichem liegen, also jeweils die Einerwürfel und die Zehnerstangen zusammen.

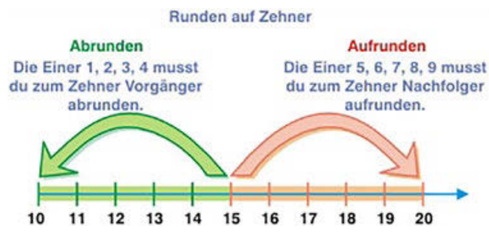
Dies gilt genauso umgekehrt, wenn der Ausgangspunkt die Mengendarstellung ist: Die Einer können links vom Zehner ebenso liegen wie rechts oder auch darüber. Haben die Kinder bereits genügend Englisch in der Schule gelernt, kann man durchaus einen Ausflug zu den englischen Zahlwörtern machen. Nicht, um die Schüler zu verwirren, sondern um das Nachdenken über das „wie viel von was?“ anzuregen, die starre Links-/Rechts- (bzw. Vorher-/Nachher-) Zuweisung aufzubrechen und so eine stabile stellenübergreifende Zahlvorstellung auszubilden.



Quelle: www.pikas-mi.dzlm.de/download/file/fid/3536

Exkurs: Runden

Zum Dezimalzahlverständnis gehören Nachbarschafts- und Lagebeziehungen. Kinder müssen in der Lage sein, durch Runden die ungefähre Größe einer Zahl angeben zu können. Zu den bisher bekannten Vergleichssymbolen $<$, $>$ und $=$ tritt ein viertes Symbol hinzu: $27 \approx 30$, in Worten: „siebenundzwanzig ist ungefähr gleich viel wie dreißig".



Quelle: www.kleineschule.com.de

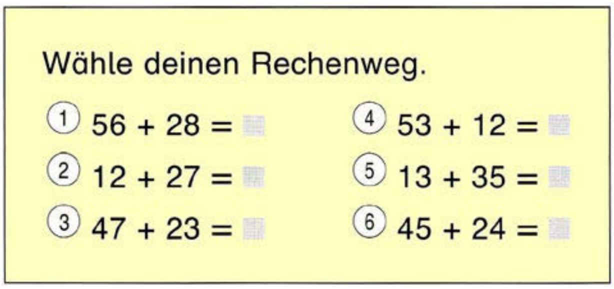
Wird die Thematik Runden nur über die Anwendung der Rundungsregeln besprochen, erscheint es Kindern als zusätzlich zu bewältigende Aufgabe, manche begreifen Runden gar als eine neue Rechenart. Die Vorschrift „Ab fünf wird aufgerundet!" steht als inhaltsleere Merkregel einer nachvollziehbaren Erklärung der Rundungsregeln im Weg. Stattdessen sollte über den *Abstand* der Zahlen gesprochen werden. Es wird der *nächstgelegene* Zehner gesucht, was sich am Zahlenstrahl veranschaulichen lässt. Um 47 zu runden, steht am Anfang die Aussage „47 liegt zwischen 40 und 50". Danach wird über den Abstand zu den beiden Nachbarzehnern gesprochen, diese werden verglichen und der nächstgelegene Zehner bestimmt.

Ein Sonderfall sind die Zahlen in der Mitte. Zu 35 lässt sich kein eindeutig nächstgelegener Zehner bestimmen, da beide Nachbarn gleich weit entfernt sind, jeweils fünf. An dieser Stelle benötigen wir eine Regel, die sich nicht aus der Arithmetik ableiten lässt. Bei uns ist es üblich, bei Zahlen, die in der Mitte liegen, stets auf den nächstgrößeren Zehner zu runden. Eine mathematische Notwendigkeit dafür gibt es nicht – es ist sogar ungünstig: Denn wenn mit auf solche Art gerundeten Zahlen weiter gerechnet wird, verfälscht sich das Ergebnis immer mehr in die größere Richtung.

Ein anderer Sonderfall betrifft „glatte Zehner". Ich kenne Schüler, die z. B. bei 40 mit der Merkregel „Bis ‚4' rundet man ab!" auf die Einerziffer „0" blicken und dann auf 30 „abrunden". Andere Kinder sagen, 40 könne man gar nicht runden, weil es ja schon ein Zehner sei. Beiden ist die (falsche) Vorstellung gemein, eine Zahl müsse beim Runden stets verändert werden. Stattdessen sollte man auch hier nach dem nächstgelegenen Zehner fragen. Die Antwort lautet: Es ist er selbst, der Abstand ist null.

Sinnvolle Bewältigung des Zehnerübergangs

Eine dekadische Zahlvorstellung muss, wie eben dargelegt, ausgebildet sein, bevor man mit diesen Zahlen rechnet. Ein in manchen Schulbüchern gewählter didaktischer Ansatz ist, Kinder das Rechnen über den Zehner „selbst entdecken" zu lassen verbunden mit der Aufforderung „Rechne auf deinem Weg!". Aus lerntherapeutischer Sicht ist dies katastrophal. Denn ungeachtet der arithmetisch-rechnerischen Entwicklung des Kindes stehen damit alle Möglichkeiten, den Zehner zu überschreiten, gleichwertig und gleichgültig nebeneinander.[6]



Quelle: Keller/Pfaff: Das Mathebuch 2

6 Nimmt man „Rechne auf deinem Weg!" ernst, so müsste streng genommen auch das Zählen als „Weg" zugelassen werden – doch dass zählendes Rechnen keine anzustrebende Vorgehensweise ist, hat sich auch unter Schulbuchautoren schon herumgesprochen.

Die Aufgabe der Lehrperson muss es jedoch sein, die „Wege" der Kinder zu analysieren und danach zu bewerten, ob und inwiefern sich darin Kenntnisse über die Bündelungsstruktur der dezimalen Darstellungsform widerspiegeln, und ihnen ggf. helfen, diese zu erlangen. Als stabile, der Logik des Zahlsystems entsprechende und umkehrbare Vorgehensweise bietet sich das klassische Teilschrittverfahren an:

$$7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$$

Hier wird die Bündelung, also der Stellenübergang, explizit vollzogen. Die Zahlzerlegungen aller Zahlen bis zehn müssen vorab verständig erarbeitet und automatisiert abrufbar sein. Andere Wege über den Zehner, wie das Nutzen von Verdopplungen ($7 + 8 = 7 + 7 + 1$), mögen arithmetisch zwar korrekt sein, sind aber aus dem Blickwinkel der dekadischen Logik eine *Umgehung* des expliziten Stellenübergangs – diesen dürfen wir den Kindern nicht ersparen, sondern müssen ihn ermöglichen.

Die Vorgehensweise, eine Zahl in ihre Ziffern zu zerlegen und diese separat zu verrechnen, wird häufig toleriert (wenn nicht sogar gefördert), um schnell richtige Ergebnisse zu erzielen. Aus didaktischer Sicht ist dies nicht empfehlenswert. Neben der Tatsache, dass die Kinder beim Stellenübergang, spätestens bei der Subtraktion, erhebliche Probleme bekommen, sollte man sich vorlegen, dass ein stellenwertübergreifendes Verständnis zweistelliger Zahlen die Basis des Kopfrechnens sein muss – ob mit oder ohne Stellenübergang. Auch bei 34 – 21 ist der anzustrebende erste Rechenschritt 34 – 20 und nicht 30 – 20, wie im folgenden ausgeführt wird.

Komplexitätsstufen beim Rechnen bis hundert

In didaktischen Werken wird in der Regel lediglich unterschieden zwischen Rechnen mit und ohne Zehnerübergang. Diese rein formelle Unterscheidung wird den Anforderungen des Begreifens des Zahlbereiches bis hundert nicht gerecht. Im folgenden werden stattdessen sieben Komplexitätsstufen dargelegt, die verstanden sein müssen, um sicher im Kopfrechen zu werden. Es handelt sich um eine logische Übersicht und sollte nicht als eine chronologische Übungsanleitung (miss)verstanden werden.

- An erster Stelle stehen Einer-/Zehner-Zusammenfügungen und -Trennungen der Art 20 + 4, 3 + 70, 64 – 4 und 53 – 50. Diese Aufgaben erfordern noch kein Verändern von Ziffernwerten, sondern beziehen sich auf den dekadischen Zahlaufbau. Erst wenn sie gelingen, macht es Sinn, im Anschluss auch Rechnungen mit Veränderungen durchzuführen.

- Rechnungen sollten zunächst eine Veränderung bewirken, exemplarisch sind 26 + 3, 4 + 42, 54 + 30, 50 + 14, 84 – 2 und 76 – 50. Wichtig ist der Blick darauf, an welcher Stelle sich etwas verändert. Die Operanden dürfen dabei nicht in ihre Ziffernwerte zerlegt werden.

- Der nächste Schritt besteht im Vollzug von zwei Veränderungen, wie in den Beispielen 34 + 25 und 65 – 13. Hier wird ein Plan nötig in der Form „Was mache ich zuerst?“. Es bietet sich auf Grund der lateinischen Schreibrichtung und im Kontrast zu den schriftlichen Verfahren an, mit den Zehnern des zweiten Operanden zu beginnen. Es müssen – wie bei allen folgenden Stufen – die Fragen gestellt und beantwortet werden „Was habe ich schon getan?“ und „Was muss ich noch tun?“. Wie bereits angemerkt, soll von Anfang an auf einen stellenwertübergreifenden Umgang mit den Zahlen abgezielt und nicht stellenseparierend vorgegangen werden. Die Rechenschritte der beiden Beispielaufgaben lauten damit 34 + 20 und 54 + 5 bzw. 65 – 10 und 55 – 3.

- Der eigentliche Zehnerübergang wird vorbereitet durch das Zehner-Auffüllen und das Zehner-Anbrechen, wie in den Aufgaben 60 – 4 und 74 + 6 erforderlich. Hier wird das Bündeln bzw. Entbündeln als separater Schritt herausgelöst.

- Danach wird der Zehnerübergang in zwei Schritten bis zwanzig besprochen, wie es in den Rechnungen 7 + 8 und 13 – 6 gefordert ist.

- Als nächstes wird das Rechnen mit einstelligem zweiten Operanden auf die Zahlen bis hundert ausgedehnt, wie es Aufgaben wie 36 + 9 und 43 – 8 erfordern.

- Schließlich werden Rechnungen der Art 54 + 27 und 82 – 36 besprochen, in der die einzelnen Bearbeitungsschritte der vorherigen Stufen nacheinander angewandt werden müssen.

Auf die solide Erarbeitung des Rechnens im Zahlbereich bis hundert muss in der zweiten Klasse großer Wert gelegt werden. Dies liefert die Grundlage für die Fortsetzung des Bündelungsprinzips auf höherwertigere Stellen in der dritten Klasse. Unser Zahlsystem kennt nicht nur einen Stellenübergang von zehn Einern zu einem Zehner, sondern es ergibt sich ein sukzessiver Fortgang. Immer zehn einer Stelle werden gebündelt zu einer Einheit der nächst höherwertigen Stelle. Hundert ist nicht die größte Zahl, die es gibt, sondern man kann es, wenn eine größere Zahl benötigt wird, im Prinzip immer weiter fortsetzen. Somit gibt es keine größte Zahl.

Meta-Einheiten

Es reicht nicht, herauszuarbeiten, dass sich das Bündelungsprinzip fortsetzt, denn dann werden notierte Zahlsymbole mit mehr als drei Stellen schnell unübersichtlich: 739261054 ist eine schlecht handhabbare lange Ziffernkette. Statt nun bei den höherwertigen Einheiten einfach weiterzumachen („Tausender, Zehntausender, Hunderttausender…“), kommt der Einheit Tausender eine besondere Rolle zu. Ab tausend wird von den Vielfachen der Tausender gesprochen: Einer, Zehner und Hunderter *von den Tausendern*. Der Tausender schlüpft damit in die Rolle einer *übergeordneten Einheit*. Fortgesetzt wird dies dann mit Einern, Zehnern und Hundertern von der Million etc. Immer drei Stellen werden gruppiert, in diesen gilt die Hierarchie „Einer, Zehner, Hunderter“ von den Meta-Einheiten Tausender, Millionen, Milliarden usw. Im Zahlsymbol wird dies gekennzeichnet entweder durch einen strukturierenden Punkt nach jeweils drei Ziffern oder durch eine Lücke: 123.456.789 bzw. 123 456 789. Schüler notieren in der Grundschule auf Karo-Papier, damit sind Punkte einfacher zu verschriften – doch auch eine Lücke ist mit etwas Mühe zu bewerkstelligen. Verzichten sollte man auf die Gruppierung jedoch nicht.[7] Eine sinnvolle Stellenwerttafel unter Berück-

7 Das Argument gegen die Verwendung des Punktes, im englischen Sprachraum trenne man Meta-Einheiten anders, ist damit zu entkräften, dass wir uns ja gerade im *deutschen* Sprachraum befinden. Der Wechsel der Sprache erfordert Übersetzungsleistungen: Will man sich englisch ausdrücken, muss man neben den Namen der Zahlen und Rechenoperationen eben auch die Notation der Zahlsymbole übersetzen.

sichtigung der Metaeinheiten sieht folgendermaßen aus:

Mio			T			E		
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Der niederwertigste Dreierblock erhält konsequenterweise auch eine Meta-Einheit, dies ist der Einer. „Einer“ ist zwar kein Bestandteil des Zahlnamens, doch soll diese Tabelle keine schematische Vorlese-Hilfe sein, sondern das Prinzip der übergeordneten Einheiten abbilden – ein Dreierblock *ohne* eine übergeordnete Einheit macht für die Erklärung keinen Sinn, daher werden die Einer als Metaeinheit ergänzt.

Dimensionierte Größen

Eine wichtige Rolle spielt das Dezimalsystem beim Formulieren von und Rechnen mit Größenangaben wie Länge, Fläche, Volumen, Gewicht und Preis, insbesondere da bereits *vor* der Einführung von Bruchzahlen in der Sekundarstufe in der Grundschule Dezimalbrüche wie 1,2 km verwendet werden. Eine Einbettung der Thematik dimensionierte Größen an dieser Stelle würde allerdings den Umfang des Textes sprengen und soll in einem separaten Artikel behandelt werden.

II. Erweiterungen in der Sekundarstufe

Dezimalbrüche

Eine stabile Vorstellung vom Zusammenhang der Stellenwerte – in die höherwertigere Richtung ist dies die Verzehnfachung der jeweiligen Einheit und umgekehrt in die niederwertigere Richtung ist dies das Teilen der Einheit durch zehn – erlaubt es, Dezimalbrüche einzuführen. Eine Erarbeitung der gemeinen Brüche und der Bruchdarstellung (Brüche sind Vielfache von Teilen der Eins) ist dafür notwendig und soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden.

Das Prinzip des Teilens des Stellenwertes durch zehn lässt sich über die Einheit eins hinaus fortsetzen. Das Teilen von eins in zehn Teile ergibt *ein Zehntel*, dies ist der Stellenwert der nächst niedrigeren Stelle, der Zehntelstelle. Eine Fortsetzung davon ergibt ein Hundertstel, ein Tausendstel usw. Im Zahlsymbol wird der ganzzahlige Teil von den Bruchteilen durch ein Komma getrennt. Werden drei Nachkommastellen überschritten, ist auch hier die optische Trennung der Meta-Einheiten Tausendstel, Millionstel etc. durch Punkt oder Leerraum sinnvoll.

Potenzdarstellung und Exponentialschreibweise

Die Stellenwerte sind eins, zehn und fortgesetzte Verzehnfachungen von zehn, also Zehnerpotenzen. Sie lassen sich auf kompaktere Weise in der Potenzschreibweise darstellen: $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$, $1.000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ usw. Die Potenzierung als Rechenart ist die fortgesetzte Multiplikation. Der Exponent (die Hochzahl) gibt die Anzahl der Faktoren der Basis (der Grundzahl) im Produkt an. Die sukzessive *Erhöhung* des Exponenten um eins ist gleichbedeutend mit der fortgesetzten *Multiplikation* mit der Basis zehn. Eine Million wird damit z. B. als 10^6 notiert.

Da ein Produkt „mit einem Faktor“ (oder gar „mit null Faktoren“) zunächst einen unsinnigen Term beschreibt, bedarf es, um auch 10 und 1 in Potenzschreibweise darstellen zu können, einer hilfsweisen Ergänzung des Produkts. Hierzu dient eins, das neutrale Element der Multiplikation. Dieser Faktor verändert den Wert eines Produkts nicht. Man fügt das neutrale Element zwei mal hinzu:

$$\begin{aligned}1.000 &= 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 &&= 10^3\\ 100 &= 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 &&= 10^2\\ 10 &= 1 \cdot 1 \cdot 10 &&= 10^1\\ 1 &= 1 \cdot 1 &&= 10^0\end{aligned}$$

Auf diese Weise bleibt eine Produktdarstellung der Potenzterme erhalten und die beiden letzten Produkte enthalten einen bzw. keinen Faktor zehn.

Eine allgemeinere Erklärung betrachtet die Erhöhung des Exponenten in umgekehrter Weise. Die *Verringerung* des Exponenten um eins entspricht der *Division* des Produktterms durch zehn. Auf diese Weise lassen sich Einer und Zehner darstellen:

$$\begin{aligned}10 &= (10 \cdot 10) : 10 = 10^{2-1} = 10^1 \quad \text{und}\\ 1 &= 10 : 10 = 10^{1-1} = 10^0.\end{aligned}$$

Setzt man dies fort, erhält man für Zehnerbrüche negative Exponenten (s. u.).

Die Hochzahl gibt die Anzahl der Nullen an, 10^6 schreibt man mit sechs Nullen. Mathematischer ausgedrückt nennt der Exponent die Position der Ziffer im Stellenwertsystem, wenn man mit null anfängt zu nummerieren:

Stellenwert	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
Abkürzung	T	H	Z	E
Zahlenwert	1.000	100	10	1
Produktterm	$10 \cdot 10 \cdot 10$	$10 \cdot 10$	10	10 : 10
Potenznotation	10^3	10^2	10^1	10^0
Position	3	2	1	0

Eine Dezimalzahl lässt sich damit z. B. folgendermaßen aufgesplittet darstellen:

$$4.567 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Die Verringerung des Exponenten lässt sich unter null fortsetzen. Ein Exponent von –1 bedeutet ein weiteres Teilen von eins in zehn Teile

$$10^{-1} = 10^{0-1} = 1 : 10 = \tfrac{1}{10}$$

und drückt damit ein Zehntel aus. Sukzessive erhält man durch weiteres Verringern des Exponenten Hundertstel, Tausendstel usw. Damit lässt sich die Notation in Potenzschreibweise auf die gebrochenen Stellenwerte fortsetzen:

$$123{,}456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

Die Stellenwerttafel sieht in den Nachkommabereich fortgesetzt wie folgt aus:

Stellenwert	Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel
Abkürzung	E	z	h	t
Zahlenwert	1	0,1	0,01	0,001
Quotiententerm	1	1 : 10	1 : 10 : 10	1 : 10 : 10 : 10
Potenznotation	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Position	0	−1	−2	−3

Sehr große bzw. sehr kleine Zahlen lassen sich mit der Exponentialschreibweise in der „wissenschaftlichen Darstellung“ als sog. Fließkommazahl darstellen. Dies vermeidet lange Zahlsymbole mit vielen Nullen.

$$1.230.000.000.000 = 1{,}23 \cdot 10^{12}$$

$$0{,}000.000.000.456 = 4{,}56 \cdot 10^{-10}$$

Die Grundzahl weist normiert eine (von null verschiedene) Vorkommaziffer auf. Der Exponent sagt formal, um wie viele Stellen man „das Komma verrücken“ muss – besser formuliert drückt er die Verschiebung im Stellenwertsystem aus. Oft benötigt man nicht alle Ziffern und kann damit übersichtlich gerundete Werte angeben.

Womöglich kennen Sie noch aus Ihrem Chemieunterricht die Avogadro-Konstante $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$, welche die Anzahl der Teilchen pro Mol angibt oder aus dem Physikunterricht die Planksche Konstante $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js, die das Verhältnis von Energie und Frequenz eines Lichtteilchens beschreibt – Beispiele für sehr große bzw. kleine Zahlen, welche konventionell ausgeschrieben unübersichtlich wären.

Resümee

Ein mangelndes Begreifen des Dezimalsystems resultiert in ungenügender Kopfrechenkompetenz, was diesen Schülern einen einsichtigen und sicheren Umgang mit alltäglichen Quantitäten verwehrt. Das Erlangen lebenspraktischer arithmetischer Kenntnisse ist solchen Schülern damit nicht möglich. Dies setzt sich fort im Scheitern beim Verstehen von Größen im gesamten weiteren Mathematikunterricht.

Es ist nicht damit getan, mit den Kindern die Mechanismen des Zehnerübergangs – sei es beim Kopfrechnen, sei es bei den schriftlichen Rechenverfahren – einzuüben. Vielmehr ist die Ausbildung eines stellenübergreifenden Zahlverständnisses nötig. Das Prinzip von Anzahl und Einheit, im Fall der Dezimalzahlen ausgedrückt am Ziffernwert und Stellenwert, muss verstanden sein. Durch die Verzehnfachung der Stellenwerte ist der Zusammenhang der Stellen festgelegt, was das Bündeln zu einer höherwertigeren und das Entbündeln zu einer niederwertigeren Einheit ermöglicht. *Dies* muss die kognitive Basis für das Kopfrechnen sein.

„3 mal 2 das ergibt 5“

Katja Rochmann, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

Im zweiten Schuljahr steht neben dem Einstieg in das Dezimalsystem das Erlernen der auf Addition und Subtraktion aufbauenden Punktrechnungen im Stoffplan.

In diesem Beitrag geht es um das Einmaleins, um die Multiplikation. Es gibt verschiedene didaktische Erarbeitungsweisen, um Schülern die Multiplikation der natürlichen Zahlen vertraut zu machen, um sinnvolle Lösungsalgorithmen zu erarbeiten und Multiplikationen zu automatisieren. Erreicht werden soll bei allen Lernstrategien das Lösen und auswendige Wissen dieser Rechenaufgaben. Auf die unterschiedliche Fachdidaktik und auf die Voraussetzungen, die die Schüler für den jeweiligen Zugang zum Einmaleins mitbringen müssen, soll hier nicht näher eingegangen werden. Im Fokus steht vielmehr der Erwerb einer Grundvorstellung vom „Malnehmen“.

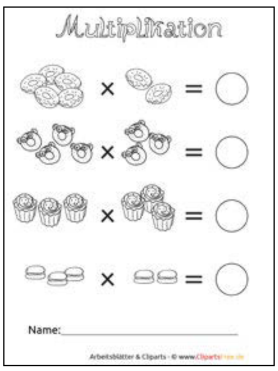
Die Multiplikation: Bloß eine Kurzschreibweise von plus mit gleichen Teilmengen? Ja und Nein.

Eine innere Vorstellung von der Multiplikation zu entwickeln, ist für viele Kinder eine große Herausforderung. Eine Hürde, die nicht einfach zu bewältigen ist. Etliche Kinder haben dies sogar in den nachfolgenden Klassenstufen nicht geschafft und wechseln ohne Operationsverständnis der Multiplikation in die weiterführende Schule.

Schüler üben oftmals seitenlang das Einkreisen immer gleich großer Mengen, schreiben die Mal- und Plusrechnungen dazu und dennoch fällt es ihnen schwer, eine sachgerechte Vorstellung von der Multiplikation zu erlangen. Gehen sie lediglich mit der Sichtweise von Plusaufgaben (Teilmengen/Gesamtmenge) an die Betrachtung der Zahlen in Malaufgaben heran, so versperrt ihnen dies zwangsläufig das Erfassen des Zahlzusammenhangs von Multiplikator und Multiplikand, von bspw. $3 \cdot 2$. Während bei der Addition die Summanden gleichbedeutend sind (zwei Teilmengen, die zusammengefügt werden), haben wir es bei der Multiplikation mit zwei logisch verschiedenen Operanden zu tun. Der Multiplikand – eben noch der Summand - ist jetzt die Rechenzahl, die die Größe der Teilmengen angibt. Diese Zahl darf jedoch nicht isoliert betrachtet werden. Erst in Kombination mit der ersten Zahl der Malaufgabe erhält sie ihre vollständige Information, denn der Multiplikator gibt die Anzahl der Teilmengen an. Die Zahlenangaben einer Multiplikation haben also im Unterschied zur Addition verschiedene Bedeutungen und sie erfordern eine andere Stufe von Abstraktion. Dies zu begreifen, verlangt einen Denkprozess, den nicht alle Kinder in ihrer inneren Vorstellung beim Anblick eines Multiplikationsterms nachvollziehen. Schnell vollkommen abgehängt im Unterricht ist, wer beim multiplikativen Rechnen an „alle Zahlen unterschiedslos zusammenzählen“ denkt.

Lassen wir die Addition noch einmal Revue passieren: Bislang wurde in der Schule erarbeitet, dass Teilmengen (Summanden), die zu einer Gesamtmenge zusammengefügt werden, auch unmittelbar „sichtbar/greifbar“ sind. So kann 3 + 2 mit drei und zwei Steckwürfeln, Plättchen oder Punkten veranschaulicht werden. Mit dieser Betrachtungsweise eins-zu-eins an Zahlen in der Malaufgabe heranzugehen, führt zu einer falschen Basisvorstellung. Das Wissen von der Rechenoperation Multiplikation verlangt eine neue gedankliche Befassung: Der erste Operand im Produktterm steht für die Information, wie oft ein gleich großer Teil (Teilmenge)[1] immer wieder genommen wird. Von einfach bis zehnfach, streng genommen von nullfach bis zehnfach. Der zweite Operand, der Multiplikand, ist sachlich gesehen gleichbedeutend mit dem Summanden. Daraus folgt: Die Rechengleichung „3 · 2 = 5“ ist ebenso eine falsche Interpretation von 3 · 2 wie die nachfolgende Veranschaulichung mit einer Gruppe aus drei Plättchen und einer Gruppe aus zwei Plättchen:

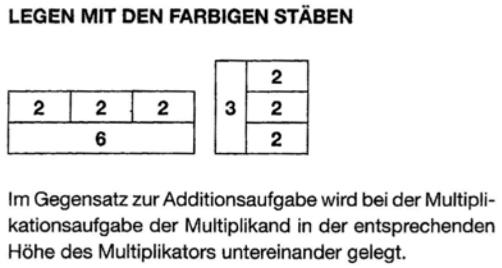
Im Internet gibt es zahlreiche Übungsaufgaben, die auf diesem Irrtum basieren. Exemplarisch ein Arbeitsblatt aus dem Fundus der auf Clipartsfree.de zur Verfügung gestellten Druckvorlagen:



Gelegentlich sind auch in Lehrmitteln Vorstellungsbilder anzutreffen, die das Ausbilden von Fehlvorstellungen hinsichtlich Produktterm (und Produktwert) unterstützen:

Aus: Clipartsfree.de, Schule, 2. Klasse Mathe Arbeitsblätter, Multiplikation, aufgerufen am 07.12.2018

1 Es wird der besseren Lesbarkeit wegen im weiteren Verlauf immer das Wort „Teil“ verwendet.

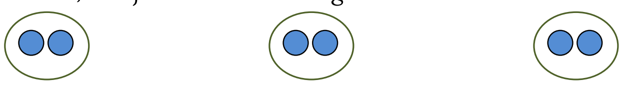


Aus: Modulino 1/2 Lehrerband S. 116, Klett Verlag, Stuttgart, 1. Auflage 2009

Kommutativität: Dieselbe Gesamtmenge ganz anders strukturiert

Die Vertauschbarkeit der Summanden ist eine gängige Lösungsstrategie für Additionen. Wie sinnvoll ist es, beim Erarbeiten des Einmaleins‘ von Beginn an das Kommutativgesetz anzuwenden?

Während die Zahlen in der Addition sinngleiche Teile sind und das Pluszeichen für das Zusammenfügen/Vermehren von Mengen steht, müssen Kinder für das Einmaleins eine innere Vorstellung davon entwickeln, dass das Rechenzeichen “·“ einen anderen Sachzusammenhang ausdrückt. Die erste Zahl in der Mal-Rechnung ist der Zahlausdruck für die Anzahl der Teile. Er zählt wie viele Teile es sind und protokolliert dieses. Die zweite Zahl benennt die Anzahl der Elemente, die jedes dieser Teile groß ist:



Die fachsprachlich unterschiedlichen Bezeichnungen für die Operanden im multiplikativen Term unterstreichen deren Verschiedenartigkeit. Der Multiplikand gibt die Größe eines Teils an. Er ist die Rechenzahl für die Anzahl der Elemente, aus denen ein Teil besteht. Hier sind es immer zwei Plättchen. Der Multiplikator zählt wie oft der Teil vorhanden ist. „Worauf muss ich achten, wenn ich, drei mal‘ erkennen will?“ Diese Abstraktionsleistung zu erbringen, kostet Mühe - einigen Kindern weniger, anderen Kinder mehr.

Insbesondere zu Beginn der Erarbeitung der Multiplikation sollte es daher vorrangig darum gehen, eine Kompetenz für die sachlogische Bedeutung von bspw. „drei mal“ zu erarbeiten. Worauf deutet der Multiplikator im Unterschied zum Multiplikand? Im Unterricht die multiplikative Aufgabe rasch auch mit der Tauschaufgabe zu verknüpfen, führt oftmals dazu, dass beim Erlernen des Einmaleins die mathematische Funktion von Multiplikator und Multiplikand im Diffusen bleibt. Es ist zwar richtig, dass 3 · 2 = 2 · 3 eine fehlerfreie mathematisch Gleichung ist, aber Achtung: Es werden hier keine identischen operationalen Bezüge ausgedrückt. Die Gleichsetzung bezieht sich lediglich auf die Gesamtmenge, den Produktwert.

Da die Operanden im multiplikativen Term unterschiedliche Bedeutung haben, macht dies die Erklärung der Kommutativität nicht so einfach wie bei der Addition, bei der lediglich die Teile vertauscht werden.

Unsere Empfehlung ist: Hände weg von der Tauschaufgabe solange die Grundvorstellung nicht gefestigt ist. Um den mathematischen Gehalt von $3 \cdot 2$ und $2 \cdot 3$ mitdenken zu können, muss die Rolle des Multiplikators im Verständnis verankert sein, denn beide Rechnungen betrachten zwar die gleiche Gesamtmenge, diese ist jedoch gänzlich unterschiedlich strukturiert. Körperlich eindrucksvoll spürbar ist der Unterschied bspw. dann, wenn man für sechs Flaschen Wasser vom 4. Stockwerk aus dreimal (für je zwei Flaschen) oder zweimal (für je drei Flaschen) in den Keller läuft.

Der Multiplikator: Sprachlich den Verinnerlichungsprozess unterstützen

Um die Erarbeitung des mathematischen Sinngehalts des Multiplikators auch mit Hilfe der Sprechweise zu unterstützen, empfehlen wir „drei(mal)" als „Wie-oft-Zahl" zu bezeichnen. Dies hebt verbal die Differenz zum Multiplikand, zur jeweiligen Anzahl der Elemente innerhalb der Portion hervor und formuliert den begrifflichen Inhalt der ersten Zahl einer Malaufgabe.

Es geht also in diesem Fall um „drei mal den Teil zwei". In der symbolischen Schreibweise ausgedrückt als „$3 \cdot 2$". Eine Möglichkeit, das Verständnis für diesen Operator zu festigen, bietet das verdeckte, „fühlende" Erarbeiten. Die Größe der Teile ist vorgegeben, sie wird nicht in den Vordergrund der Aufmerksamkeit gestellt. „Wie oft sind es zwei Plättchen?" Die Antwort ist Mithilfe des vorstrukturierten Materials, das unter einem Tuch platziert ist, gut zu erfassen.

Eine weitere Anregung, die das Entwickeln eines Grundverständnisses auf spielerische Weise unterstützt, wird nachfolgend vorgestellt. Jeder Spieler darf zehnmal hintereinander würfeln. Bevor gewürfelt wird, muss der Spieler ein Würfelbild aussuchen und festlegen, wie oft er dieses Würfelbild mit zehn Würfen erreichen wird. Es wird sozusagen vorab einen Tipp abgegeben. Die Realisierung wird dann in einer weiteren Zeile festgehalten. Dieses Spiel kann man gegen sich selbst führen (Schaffe ich es, meine Vorhersage zu erreichen?) oder gegen andere Mitspieler (Wer hat mit seinem Tipp richtig gelegen/ist ihm am Nächsten gekommen?). Es sind auch andere Varianten spielbar, bspw. Tipps für das „Wie-oft würfeln" aller sechs Würfelbilder abgeben, anschließend würfeln und notieren, wie oft die einzelnen Würfelbilder während der zehn Würfe gefallen ist. (Welches Würfelbild habe ich wie oft gewürfelt?)

Name	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
mein Tipp			$2 \cdot 3$			
tatsächlich gewürfelt			$4 \cdot 3$			

Ebenso sind Rechengeschichten, die Alltagssituationen beschreiben ein gutes Mittel, um das Vorstellungsbild vom multiplikativen Zusammenhang in die richtige Bahn zu lenken. „Klaus, Tina und Alina kaufen sich Eis. Jeder bestellt zwei Kugeln Eis. Zeichne ein Bild mit den Eiswaffeln und den Eiskugeln. Wie oft musst du Eiswaffeln zeichnen und wie viele Kugeln sind in jeder Waffel?"

Das Vorlegen korrekter und fehlerhafter Gleichungen bietet einen Anhaltspunkt dafür, ob Schüler die Multiplikation und Addition angemessen miteinander verknüpfen können. Hierbei geht es um das Erkennen des mathematisch-logischen Zusammenhanges von Plus- und Mal-Rechnungen. Ausrechnerische Fertigkeiten spielen keine Rolle. Fordern Sie die Kinder im Unterricht jedoch dazu auf, Begründungen für ihre Beurteilungen zu geben. „Das ist richtig weil …" bzw. „Das ist falsch weil …".

Kreuze an:	richtig	falsch
$3 \cdot 2 = 3 + 2$		
$18 + 18 = 2 \cdot 18$		
$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 5$		
$11 \cdot 11 = 11 + 11$		
$8 \cdot 8 = 16$		

Nur eine Menge, welche Aufgabe ist das denn?

Ein häufig genutzter Merksatz beim Erarbeiten der Einmaleins-Vorstellung ist: „Die Multiplikation ist die Kurzschreibweise von Additionen mit gleich großen Summanden." Mit dieser Zusammenfassung lassen sich allerdings multiplikative Rechnungen, die einen Teil oder null Teile umfassen, nicht hinreichend erklären.

Was ist von folgender Mengenpräsentation zu halten? Wie überträgt man diese in eine Malrechnung?

Es ist für viele Kinder erstmal ungewohnt in dieser Darstellung eine Einmaleins-Aufgabe zu entdecken. „Sonderbar, zu sehen ist nur eine Menge mit zwei Plättchen. Ist das vielleicht ‚2 + 0‘ oder ‚0 + 2‘? Eine Malaufgabe dazu weiß ich nicht! Schauen wir uns die Additionen 2 + 0 und 0 + 2 an, so fehlt beiden ein wichtiges Kriterium, um sie in eine Multiplikation übertragen zu können: Das Kriterium der gleich großen Summanden.

Rückt man jedoch die Wie-oft-Zahl in den Mittelpunkt des Betrachtens, so erschließt sich die obige Darstellung als Malrechnung mit dem Term „$1 \cdot 2$“. Dargestellt ist *ein* Teil mit zwei Plättchen. Abstrakt formuliert: „Wie-oft wird die Rechenzahl zwei zusammengefügt?“ Anschaulich formuliert: „Wie-oft liegen zwei Plättchen auf dem Tisch?“ Antwort: „Ein mal.“ Zwei Plättchen sind einfach vorhanden, nicht mehrfach.

Die Zahl null: Das neutrale Element in Multiplikations-Rechnungen?

Die Zahl null verschwindet gerne aus unterrichtsbegleitendem Lernmaterial, fast so, als bräuchte man sie nicht zu berücksichtigen. Ein Merksatz, wie Paul ihn in der Förderdiagnostik zu der Aufgabe 30 + 52 vorträgt, unterstreicht diese scheinbare Bedeutungslosigkeit: „3 + 5 sind 8 und die 2 bleibt wegen 0.“ Diese Herangehensweise führt beim Malnehmen zu einem falschen Produktwert wie bei $0 \cdot 2 = 2$ statt $0 \cdot 2 = 0$. Wichtig ist zu verstehen, dass im Unterschied zur Addition die Zahl null beim Multiplizieren nicht das neutrale Element ist. Da der Multiplikator die Anzahl der Teilmengen angibt, gilt folglich für alle Einmaleins-Reihen: Ist der Multiplikator null, dann ist der Produktwert ebenfalls null. Da die Multiplikation kommutativ ist, führt die Zahl null als Multiplikand zum gleichen Resultat. Auch wenn Multiplikationen mit „0“ im Aufgabenterm in vielen Lehr- und Lernmitteln, in vielen Einmaleins-Tafeln, nicht anzutreffen sind, thematisiert werden sollte die Multiplikation mit „0“ auf jeden Fall, insbesondere um die Abgrenzung zwischen dem neutralen Element „0“ beim Addieren ($0 + 2 = 2$) und dem neutralen Element „1“ beim Multiplizieren zu verstehen ($1 \cdot 2 = 2$).

Während sich mit $2 \cdot 0$ immerhin noch die additive Vorstellung von $0 + 0$ verbinden lässt, ist $0 \cdot 2$ nicht in eine Addition zu übertragen. Um ein Verständnis dafür zu bekommen, warum $0 \cdot 2$ „0 ergibt“, eignen sich Erlebnisse aus dem Alltag. Sie sind eine gute Hilfe, um eine innere Vorstellung vom operationalen Sachverhalt einer Multiplikation mit der Wie-oft-Zahl null zu entwickeln. Eine kurze Rechengeschichte zu $0 \cdot 2$ könnte lauten:

Kai will zwei Eintrittskarten für das Fußballspiel am Samstag kaufen. Alle Karten sind schon verkauft. Wie oft kann Kai zwei Karten kaufen?

Zu begreifen ist, dass $0 \cdot 2$ *kein mal ein Teil der Größe zwei* bedeutet und der Wert des Produktes daher keine „2“ sondern „0“ ist!

Die Wie-oft-Zahl, ein unbedingtes Muss für Divisionen mit zweistelligem Divisor

Das Resultat des Vervielfachens (der Produktwert) lässt sich natürlich auch über die Umkehrung wieder auf seinen Ausgangspunkt zurückführen. Gelegentlich haben Kinder als Ansporn zum Automatisieren des Einmaleinses den Hinweis erhalten: „Wenn du die Einmaleins-Aufgaben kannst, dann kannst du später auch die Geteilt-Aufgaben lösen!“ Dies gilt jedoch nur begrenzt. Spätestens wenn Rechnungen das kleine Einmaleins überschreiten, ist das Verständnis vom Aufteilen – als inverse Operation des Vervielfachens - elementarer Grundstock, um eine Division bewältigen zu können. Bei mehrstelligem Divisor wie beispielsweise 138 : 23 wäre die zielgerichtete Fragestellung „Wie-oft kann man 23 von 138 wegnehmen?“ oder analog dazu „Wie-oft ist 23 in 138 enthalten?“ Für das Bestimmen des Werts des Quotienten muss der Rechner auf die Wie-oft-Zahl reflektieren können, ansonsten ist er schnell überfordert, das Vielfache des Teilers zu benennen.

Fazit

Beim Erarbeiten der Multiplikation sollte im Mittelpunkt das Wissen von der Verknüpfung zwischen Mal- und Plusrechnung stehen: Das Verstehen der Multiplikation als Addition gleich großer Summanden. Ein großer Stolperstein für das sichere Beherrschen multiplikativer Rechenaufgaben ist jedoch das Begreifen des Multiplikators als Zahlsymbol für Wie-oft immer gleich große Teile“, als Repräsentant für die Anzahl der Teile! Die erste Zahl der Malaufgabe mit diesem mathematischen Gehalt zu denken, dafür müssen Schüler eine Routine entwickeln. Dies bildet nicht nur die Grundlage für das Begreifen und Festigen des kleinen Einmaleins sondern auch für das Dividieren, das Multiplizieren größerer zweistelliger Zahlen und das überschlagende Rechnen.

Demjenigen, der neugierig auf weitere Ideen für den unterrichtlichen Einstieg in die Multiplikation geworden ist und das hier Skizzierte vertiefen möchte, sei ein Buch von M. Gaidoschik empfohlen: Einmaleins verstehen, vernetzen, merken; Friedrich Verlag; 4. Auflage 2017; ISBN:978-3-7800-4802-8.

Die Verortung der Zahl

Kritik an der sog. Hundertertafel

Christiane Graefen, Mathematisches Institut z. Behandlung der Rechenschwäche/Dyskalkulie, München

In Kopf und Zahl hat es schon mehrere kritische Artikel zur sog. Beschrifteten Hundertertafel gegeben (z. B. in Nr. 16 und Nr. 7).

Die dort vorgetragene grundsätzliche Kritik wirft dem Material schwerwiegende Fehler vor. In der Hauptsache die, dass Kardinal- als Ordinalzahlen dargestellt werden. Jede Zahl hat ein Feld. Also ist jede Zahl gleich groß, nämlich so groß wie 1. Somit lädt das Material zum Zählen ein und schult gerade nicht die Größenvorstellung. So weit unsere Meinung.

Schulbuchautoren und Lehrplanbeauftragte sehen das offenbar ganz anders: In fast allen Schulbüchern der 2. Klasse wird dieses Anschauungsmaterial verwendet, in diesem Schuljahr wurde vom Oldenbourg-Verlag ein Förder-Material vorgelegt, das besonders intensiv Übungen an der Hundertertafel für Schüler mit Dyskalkulie einsetzt. Daraus sind die beiden Abbildungen in diesem Text.*

Wir nehmen also zur Kenntnis, dass die Hundertertafel offenbar einige Vorteile besitzt. Gelobt wird sie dafür, den Schülern eine Orientierung im Zahlenraum bis 100 zu vermitteln. Das mag im Allgemeinen zutreffen, aber nicht für rechenschwache Schüler.

Was kann und soll man lernen und was „lernt" hingegen das rechenschwache Kind?

Der verständige Schüler hat den Aufbau des Zahlenraums bereits im Prinzip verstanden und kann nun mit diesem Material sein Vorwissen vertiefen. Er bewegt sich auf der Hundertertafel mit einer gewissen Selbstverständlichkeit, die ihm die Zahlen nahelegen. Klar ist ihm, dass eins nach rechts bedeutet plus 1. Das erkennt er schon an den Zahlen. Wenn er rechnet: 65 + 10 = 75 bewältigt er diesen Zehnerschritt bequem in einem Schritt nach unten. Jetzt hat er an der Zehnerstelle einen Zehner mehr, die Einerstelle bleibt gleich. Schön. So kann er auch größere Zahlen leicht addieren und subtrahieren.

Aber was „lernt" der rechenschwache Schüler? Seine Idee von den Zahlen ist verschwommen, er behandelt zweistellige Zahlen oft, als wären es zwei (ein-)stellige Zahlen. Dennoch weiß er, dass es so nicht ist. Sein Rechnen fällt mit Zählen zusammen, Plusrechnen ist Hinaufzählen und Minusrechnen ist rückwärts zählen.

Konfrontiert mit der Hundertertafel bemerkt er, dass er nun in vier Richtungen zählen kann. Im Unterschied zu anderen Kindern erschließt sich ihm die Regel aber nicht aus der Anordnung der Zahlen, sondern er muss die Bewegungen auf der Tafel als Verhaltensregel lernen. Eins runter ist 10 mehr, eins links ist 1 weniger usw.

Dieser Schüler stellt sich immer die Frage, in welche Richtung muss ich eins gehen, nach rechts, nach links, nach oben oder nach unten? So wird Rechnen rein zur Anwendung einer Vorschrift. Das kommt daher, dass die Anordnung der Zahlen willkürlich ist (man könnte z. B. ja die 1 auch in die rechte untere Ecke schreiben).** Dieser Schüler hat bereits Mühe zu verstehen, dass er anstelle der 10 einzelnen Kästchen nach rechts (mit Zeilensprung, der ihn zusätzlich verwirrt) einen Schritt nach unten gehen kann, wie in Abb. 1 von 6 auf 16 mit der Leiter. Wieso ist denn 1 Schritt = 10 Schritte?

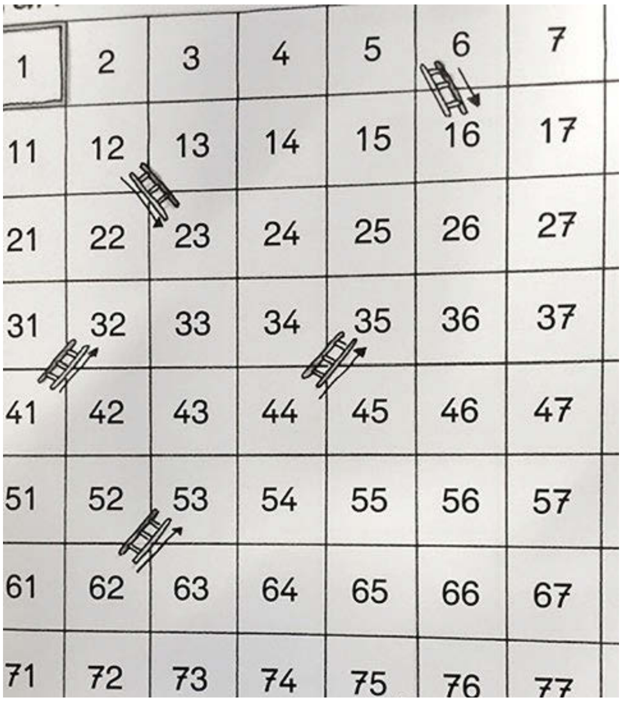
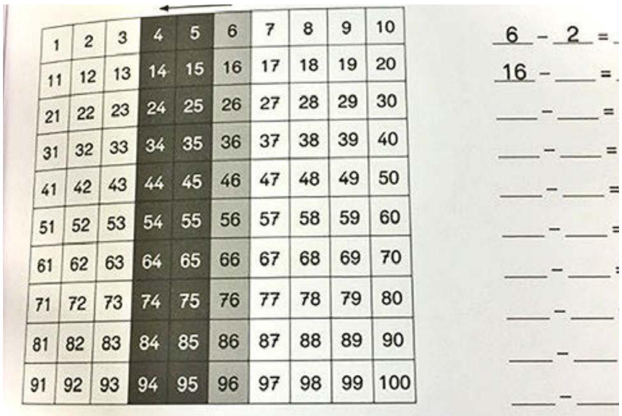


Abb. 1. Ausschnitt

Der eine Schritt nach unten ist sachlich die Addition eines Zehnerbündels. Aber vom Bündeln ist hier nichts zu erkennen, stattdessen ist jedes Feld gleich viel wert. Also bleibt nur, auswendig zu lernen, welcher Schritt was bedeutet.

Dass aber die gleiche Leiter auch einen Sprung von **11** (wie von 12 auf 23) oder aber von **9** (wie bei der Leiter von 32 auf 41) bedeuten kann, das wird für rechenschwache Schüler nur mit extra Erklärungen verstehbar sein. Offenkundig als Erleichterung gedacht, führen die Leitern zu weiteren Fragen.

Nun zum Rechnen mit Hilfe der H-Tafel am Beispiel der Subtraktion.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

6 – 2 = ___
16 – ___ = ___

Abb. 2. Man fragt sich, warum 6-2 nicht gleich 3 ist...

Für die Aufgaben 6 – 2 und Co. sind hier jeweils <u>3 Felder</u> eingefärbt, die Ausgangszahl etwas heller, die beiden anderen dunkler. Das ist normaler Weise gar nicht logisch, hier aber notwendig, weil jede Zahl als ein Platz dargestellt ist. Die 6 ist das Ausgangsfeld, das nur als Startfeld zählt, deshalb ist es heller. Man geht dann mit dem Finger oder mit den Augen auf das Feld 5, dann auf Feld 4: „Der sechste, der fünfte, der vierte". Also hat man drei Felder benannt. Aber man hat nicht drei abgezogen, sondern man bleibt beim dritten Feld stehen und benennt dieses als Ergebnis. Die Ergebnis-Zahl ist ja richtig, aber die Darstellung der Rechenoperation ist es nicht.

Und genau so „rechnet" das rechenschwache Kind ohnehin: nur dass in seiner Logik 5 herauskommt. Es zählt: der sechste, der fünfte, hat damit zwei Zahlen benannt und ist fertig. Das Ergebnis ist falsch, die Logik ist die gleiche.

Nehmen wir zum Kontrast eine korrekte Rechenhandlung für die Aufgabe 6 – 2: Von der Ausgangsmenge 6 Würfel wird die Teilmenge 2 Würfel weggenommen. Diese Teilmenge müsste auch nicht aus dem fünften und dem sechsten Würfel bestehen; **welche** Würfel weggenommen werden, ist beliebig. Denn in der Menge sind alle Einer gleich.

Bei diesem handelnden Rechnen ist sinnfällig, dass zunächst nur die Ausgangsmenge 6 vorkommt, von der eine in ihr enthaltene Teilmenge 2 weggenommen wird. Der Subtrahend ist also keine neue, von der Ausgangsmenge getrennte Zahl oder Menge.

Bei der Subtraktion auf der Hundertertafel ist leider von Wegnehmen einer Teilmenge nichts zu sehen, die Zahlfelder sind vorher wie nachher vorhanden. Das „minus 2" ist nichts als der Befehl, zwei Felder nach links zu gehen.

Solche Materialien wollen fördern, indem sie es auch schwachen Schülern erlauben, richtige Ergebnisse zu produzieren.

Wenn aber gar nicht gerechnet wurde, sondern nur abgezählt, ist auch der Lerneffekt gering, denn jede Aufgabe ist für das Zählkind eine neue Abzählung.

Fazit: Dem Schüler kann die Anstrengung nicht erspart werden, die ganze Zahl und die darin enthaltene Menge und den Zahlaufbau zu verstehen. Er muss die Zahlen auch als aus anderen Zahlen zusammengebaute verstehen und eine relationale Größenvorstellung entwickeln. Durch ständiges Zählen geschieht das genau nicht. Abgesehen davon eignet sich der Zahlenraum bis 100 zum Zählen nicht mehr. Auch nicht an der Hundertertafel.

[*] Oldenbourg Kopiervorlagen 2016, Rechenschwache Kinder gezielt fördern

[**] Fußnote: Dann würde übrigens die Rechenrichtung durchaus logischer sein, so wie bei der Zahlenmauer die größte Zahl ja auch oben ist. Aber dies soll kein Plädoyer sein für eine solche Umdrehung, denn der Einwand ist ja fundamental.

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund; Katja Rochmann, Osnabrück
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

Arbeitskreis vom
Zentrum für angewandte Lernforschung
gemeinnützige GmbH

30175	**Hannover** Leonhardtstr. 2 **Therapie-Zentrum Rechenschwäche Dyskalkulie**	Tel.: 0511 - 318 08 23 Fax: - 336 49 88	E-Mail: info@rechenschwaeche-hannover.de Internet: www.rechenschwaeche-hannover.de
33102	**Paderborn** Friedrich-Ebert-Str. 8a **Zentrum für mathematisches Lernen**	Tel.: 05251 - 205 09 74	E-Mail: info@rechentherapie-paderborn.de Internet: www.rechentherapie-paderborn.de
34131	**Kassel** Wilhelmsh. Allee 287 **Zentrum für mathematisches Lernen**	Tel.: 0561 - 316 05 60 Fax: - 314 9 41	E-Mail: info@rechenschwaeche-kassel.de Internet: www.rechenschwaeche-kassel.de
38100	**Braunschweig** Steinweg 4 **Institut für Mathematisches Lernen**	Tel.: 0531 - 121 677 50 Fax: - 121 67 59	E-Mail: info@iml-braunschweig.de Internet: www.zahlbegriff.de Filiale: **Gifhorn**
40211	**Düsseldorf** Kurfürstenstr. 8 **Mathematisch-Lerntherapeutisches Institut**	Tel.: 0211 - 171 06 67 Fax: - 171 06 68	E-Mail: mli@rechenschwaeche.org Internet: www.mli-duesseldorf.de
44135	**Dortmund** Kaiserstr. 5a **Mathematisch Lerntherapeutisches Zentrum**	Tel.: 0231 - 83 900 49 Fax: - 83 90 49	E-Mail: mlz-dortmund@t-online.de Internet: www.mlz-dortmund.de Filialen: **Bochum Lüdenscheid**
49074	**Osnabrück** Kollegienwall 28 a/b **Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen**	Tel.: 0541 - 205 22 42 Fax: - 205 22 44	E-Mail: os-zentrum@t-online.de Internet: www.os-rechenschwaeche.de Filialen: **Herford Münster Rheine Diepholz**
50668	**Köln** Neustadt Nord Theodor-Heuss-Ring 52 **Lerntherapeutisches Zentrum Rechenschwäche**	Tel.: 0221 - 912 34 50 Fax: - 912 3 52	E-Mail: dys@lzr-koeln.de Internet: www.lzr-koeln.de Filialen: **Köln-Rodenkirchen Eschweiler**
53111	**Bonn** Nordstr. 75 **Zentrum für Dyskalkulietherapie Bonn**	Tel.: 0228 - 976 66 00 Fax: - 976 66 02	E-Mail: dys@zdb-bonn.de Internet: www.zdb-bonn.de
57072	**Siegen** Löhrstr. 15 **Zentrum für mathematisches Lernen**	Tel.: 0271 - 703 05 700	E-Mail: info@rechenschwaeche-siegen.de Internet: www.rechenschwaeche-siegen.de

Mathematisches Institut
zur Behandlung der Rechenschwäche/Dyskalkulie

80333	**München** Brienner Str. 48	Tel.: 089 - 523 31 42 Fax: - 523 4 83	Service-Tel.: 0180 - 300 16 99 (9 ct/min) E-Mail: institut@rechenschwaeche.de Internet: www.rechenschwaeche.de

81245 München-Aubing	81479 München-Solln	82008 Unterhaching	85551 Kirchheim-Heimstetten
85716 Unterschleißheim	82178 Puchheim	82211 Herrsching	82319 Starnberg
83607 Holzkirchen	83022 Rosenheim	83671 Benediktbeuern	85221 Dachau
86150 Augsburg	86899 Landsberg	86938 Schondorf	93049 Regensburg

Das IML in Gifhorn hat eröffnet

Seit dem neuen Schuljahr bietet das Institut für Mathematisches Lernen seine Leistungen Diagnostik und integrative Lerntherapie bei Rechenschwäche auch an seinem neuen Standort in Gifhorn an.

Die telefonische Fachsprechstunde

Von Dienstag bis Donnerstag von 12.00 bis 14.00 Uhr (jedoch nicht in den niedersächsischen Schulferien) können Sie sich unter 05371-9459598 von einem Lerntherapeuten telefonisch beraten lassen.

Lageplan im Süden von Gifhorn

Institut für Mathematisches Lernen Gifhorn

38518 Gifhorn, Isenbütteler Weg 43
Homepage: www.iml-gifhorn.de
E-Mail: info@iml-gifhorn.de
Tel. 05371-9459598, Fax 05371-9459599

Fortbildung zum Thema Dezimalsystem

Mi, 04.03.2020 und 11.03.2020, 15.00-18.00 Uhr

Arithmetische Lerninhalte der zweiten Klasse
– Sinnvolle Einführung des Zehnersystems
– Erarbeitung der Multiplikation mit Kernaufgaben

Ort: Technische Universität (Campus Nord)
38106 Braunschweig, Bienroder Weg 82 (Raum 212)

Veranstalter: Kompetenzzentrum Lehrerfortbildung an der TU Braunschweig
www.tu-braunschweig.de/fk6/klbs

Ankündigungstext:
www.zahlbegriff.de/Veranstaltungen.html

Online-Anmeldung:
vedab.de/veranstaltungsdetails.php?vid=109968

IML

Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Beratungs- und Forschungseinrichtung zur Diagnose, Therapie und Prävention der Rechenschwäche/Dyskalkulie

- Qualitative Förderdiagnose
- Wissenschaftliche Beratung
- Integrative Lerntherapie
- Spezifische Lehrerfortbildung

So erreichen Sie das IML Braunschweig
38100 Braunschweig, Steinweg 4 (Haltestelle Rathaus)
Telefon 05 31-12 16 77 50, Fax 05 31-12 16 77 59
per E-Mail: info@iml-braunschweig.de
im Internet: http://www.iml-braunschweig.de
Telefonsprechstunde: Di–Do, 12–14 Uhr
(nicht in den Ferien)

Schulinterne Lehrkräftefortbildung (SchiLF)
Wir sind offizieller Fortbilder des Kompetenzzentrums Lehrerfortbildung der TU Braunschweig und bieten u. a. folgende Seminare an:

- **Qualitative Diagnostik von Rechenschwäche**
  Erkennen von Dyskalkulie in diagnostischen Gespräch
- **Prävention/Vorbeugung in der ersten Klasse**
  Prozessbegleitende Beobachtung und Gegenstrategien
- **Rechenschwäche in der Sekundarstufe I**
  Probleme mit Dyskalkulie in weiterführenden Schulen

Haben Sie Interesse an einer Veranstaltung, so fordern Sie von uns bitte unser ausführliches Fortbildungsprogramm an.

Abonnement unserer halbjährlichen Zeitschrift
Der Bezug von „Kopf und Zahl" ist beim IML Braunschweig sowohl in elektronischer als auch in gedruckter Form möglich. Bitte beachten Sie hierfür das beiliegende Bestellformular.

Das IML Braunschweig ist Mitglied im

Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung
(gemeinnützige Gesellschaft mbH)

http://www.arbeitskreis-lernforschung.de

Auf der Homepage finden Sie viele weitere Informationen zur Thematik Dyskalkulie, Buchtipps und einen Pressespiegel.